

112 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區(高雄區) 筆試(一) 編號: _____

注意事項:

(1)時間分配: 2 小時

(2)本試卷共四題, 滿分 49 分。第一題 12 分, 第二題 12 分, 第三題 12 分, 第四題 13 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題、答案卷及計算紙須一同繳回。

一、求函數 $f(x) = [1 - x] + [x - 1] + \left[\frac{2x}{3}\right] + [2x]$, $112 \leq x \leq 2023$

可能的函數值的個數。(符號 $[a]$ 表示不大於實數 a 的最大整數)

二、設 x, y 均為正整數, 求方程式 $15^x - 7 \cdot 2^y - 1 = 0$ 的所有解?

三、在 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, 若 $\angle ABC = 20^\circ$ 且 $\angle CAB = 40^\circ$,

求 $\frac{a^3 - b^3 - 5ab^2}{a^3 - b^3 + 6ab^2}$ 之值。

四、已知 $f(x)$ 是定義域和值域都是實數值的函數, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,

且滿足對實數 $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$, 恆有 $f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x + 1$,

求 $f(\sqrt{3} - 1) + f(\sqrt{3} + 1)$ 之值。