

114 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（高雄區） 筆試（一） 編號：_____

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題、答案卷及計算紙須一同繳回。

一、設 a, b, c 為實數， $f(x) = ax^2 - 2(a - b)x + a - 2b + c$ ， $a \neq 0$ 。若 $0 \leq x \leq 2$ 時，則 $|f(x)| \leq 1$ ，求當 $0 \leq x \leq 2$ 時， $|ax + 2b|$ 的最大值為何？

二、求所有的正整數 n ，使得 $(35.5)^n + (28.5)^n$ 為正整數。

三、給定正整數 a, b ，若對任意正整數 k ，皆有 $\frac{a^{k+1}}{b^k}$ 為整數，試證 $\frac{a}{b}$ 為整數。

四、已知平面上三個圓 C_i ($i = 1, 2, 3$)，其中， C_1 的直徑 $\overline{AB} = 1$ ； C_2 和 C_1 同圓心， C_2 的直徑 k 滿足 $1 < k < 3$ ； C_3 以 A 為圓心，直徑為 $2k$ 。考慮所有線段 $\overline{XY}$ ，一端 X 在 C_2 上，另一端 Y 在 C_3 上，並且點 B 在線段 $\overline{XY}$ 上，求線段 $\overline{XY}$ 的最小長度為何？（以 k 表示）

