

高雄市立高雄高級中學

105 學年度科學班科學能力檢定數學科試題

【數學能力檢定】試題卷

注意：(1)本試題分為填充題與計算證明題兩大部分。填充題部分僅需將答案填入「答案卷」上正確題號之空格內；計算證明題部分請將計算證明過程書寫至指定欄位，違者不計分。

(2)試題卷請於繳交答案卷時一併繳回。

一、填充題：

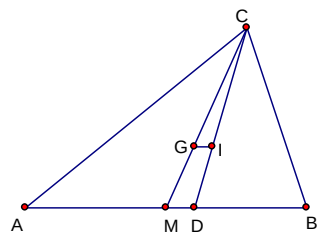
說明：本大題共有 15 題，請用黑色或藍色的原子筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題 8 分。

1. 試解方程式 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

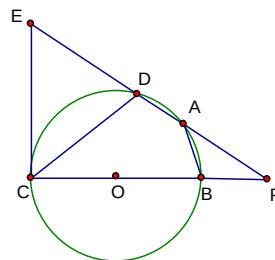
2. 設四位數 $abcd$ 為一完全平方數，前兩位數字所成之數減 1 等於後兩位數字所成之數的兩倍，求此四位數 $abcd$ 。(註：可以寫成某個整數平方的數稱為完全平方數)

3. 某辦公大樓安排了 7 天的窗戶清潔工作，第二天起每天比前一天增加五個清潔人員，但從第二天起每人每天卻比前一天少清潔五片窗戶，且同一天清潔的人都清潔相同數量的窗戶，若 7 天共清潔了 9947 片窗戶，則清潔最多片窗戶的那天，共清潔了多少片？

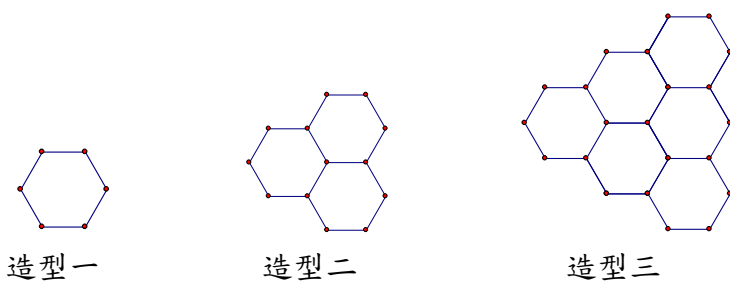
4. 如右圖，三角形 ABC 之重心 G ，內心 I ， $\overline{AB} = 42$, $\overline{GI} = 2$, 且 $\overline{AB} \parallel \overline{GI}$ ，若 $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ ，求數對 $(a, b) = ?$



5. 如右圖，四邊形 $ABCD$ 內接於圓， $\overline{BC}$ 為直徑， O 為圓心且 $\overline{AB} = \overline{AD}$ ，延長 $\overline{BC}$ 與 $\overline{DA}$ 交於 P ， $\overline{CE}$ 與圓相切於 C 點， $\overline{CE}$ 與 $\overline{PD}$ 的延長線交於 E ， $\overline{PB} = \overline{OC}$ ， $\overline{CD} = 12$ ，求 $\overline{DE}$ 。



6. 考慮以下由正六邊形所構成的造型：



造型一包括有 6 條線段，造型二包括有 15 條線段，造型三包括有 27 條線段，問造型十有多少條線段？

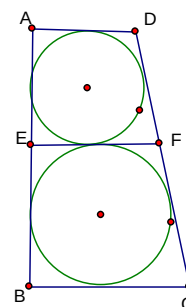
7. p 為質數，且 p^4 的全部正因數總和為一個完全平方數(註:可以寫成某個整數平方的數稱為完全平方數)，求質數 p 。

8. 設 x, y 為正整數，求滿足方程式 $x^2 + y^2 = 208(x - y)$ 的所有數對 (x, y) 。

9. 關於 x 的二次方程式 $(k^2 - 6k + 8)x^2 + (2k^2 - 6k - 4)x + k^2 = 4$ ，兩根皆為整數，求滿足此條件的所有 k 值之和。

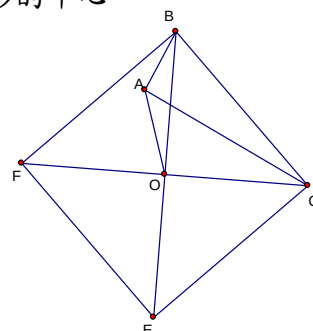
10. 如右圖， $ABCD$ 為一梯形， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，面積為 10，高為 4， $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ ，且 $\overline{EF} \parallel \overline{AD}$ ，把梯形 $ABCD$ 分成兩梯形，設四邊形 $ADFE, EFCB$ 的內切圓半徑分別為 r_1, r_2 ，求 $r_2 = ?$

答: $\frac{4}{3}$



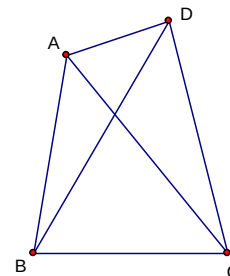
11. 若 $a > 0, b > 0, c > 0$ ，且 $a + b + c = 1$ ，試求 $y = \sqrt{1 - 2a^2} + \sqrt{1 - 2b^2} + \sqrt{1 - 2c^2}$ 的範圍。

12. 如右圖，直角三角形 ABC ，以斜邊 $\overline{BC}$ 為一邊，在三角形 ABC 之同側作正方形 $BCEF$ ，設正方形的中心為 O ，連接 $\overline{AO}$ ，若 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ ， $\overline{AO} = 6$ ，求 $\overline{AC}$ 。



13. 給定兩組數， A 組為 $1, 2, 3, \dots, 100$ ； B 組為 $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 100^2$ ，對於 A 組中的數 x ，若有 B 組中的數 y ，使得 $x+y$ 也是 B 組中的數，則稱 x 為”好數”，問 A 組中的”好數”有多少個？

14. 如右圖，在凸四邊形 $ABCD$ 中， $\angle ABD = 16^\circ, \angle DBC = 48^\circ, \angle BCA = 58^\circ, \angle ACD = 30^\circ$ ，求 $\angle ADB = ?$

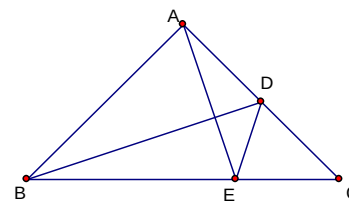


15. 若 a, b, c 均為正整數， $a \leq b \leq c$ ，滿足方程式 $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) = 2$ ，試問數對 (a, b, c) 有多少組？

二、證明題：

說明：本大題共有 2 題，請用黑色或藍色的原子筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題 15 分。

1. 如右圖，已知 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} = \overline{DC}$ ， $\overline{AE} \perp \overline{BD}$ ，試證明： $\angle ADB = \angle CDE$ 。



2. 黑板上，原本寫有 0, 1, 4 三個數，針對黑板上的數進行操作，每次操作都可以從黑板上任意挑選兩個數 a, b ，然後在黑板上添加一個新數 $c = ab + a + b$ ，例如：挑選 1, 4，添加新數為 $1 \cdot 4 + 1 + 4 = 9$ ，試問以此規則，是否在有限次操作後黑板上會出現 699 或 2559？請說明理由。

試題結束