

高雄市立高雄高級中學 107 學年度科學班科學能力檢定數學科試題

注意：(1)本試題分為填充題與計算證明題兩大部分。填充題部分僅需將答案填入「答案卷」上正確題號之空格內；計算證明題部分請將計算證明過程書寫至指定欄位，違者不計分。

(2)試題卷請於繳交答案卷時一併繳回。

一、填充題：

說明：本大題共有 12 題，請用黑色或藍色的原子筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題 10 分。

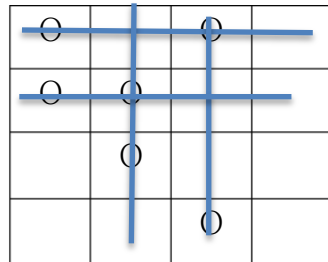
1. 試求正數 x 滿足方程式： $\frac{1}{x^2-10x-29} + \frac{1}{x^2-10x-45} - \frac{1}{x^2-10x-69} = 0$ 。

2. 假設 $S = \frac{1}{6\sqrt{4}+4\sqrt{6}} + \frac{1}{8\sqrt{6}+6\sqrt{8}} + \frac{1}{10\sqrt{8}+8\sqrt{10}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{98}+98\sqrt{100}}$ ，試求 S 之值。

3. 假設三正數 a, b, c 滿足不等式： $\begin{cases} \frac{17}{6}c - b < a < 3c - b \\ \frac{5}{2}a - c < b < \frac{8}{3}a - c \\ \frac{7}{2}b - a < c < \frac{15}{4}b - a \end{cases}$ ，試比較 a, b, c 的大小關係。(請由小排到大)

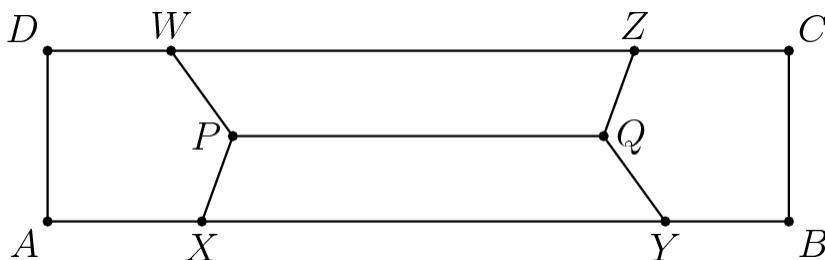
4. 已知 x, y 均為正整數，且滿足關係式： $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$ ，試求有序數對 (x, y) 。

5. 在 4×4 的方格中，把部分小方格裡畫上圈圈，再從這 4×4 的方格中，任取其中的 2 行與 2 列刪掉。若要不管怎麼刪掉，都至少有一個含有圈圈的小方格沒被刪掉，試問一開始要塗多少個小方格。



6. 在一棟有 31 樓層的大樓裡，有一部電梯停在第一層，他一次最多可以容納 30 人，而且只能在第 2 層到第 31 層中的某一層停一次，對每個人來說，往下走一層樓梯，感到 1 分的不滿意；往上走一層樓梯，感到 3 分的不滿意。現在有 30 個人在第一層，而且他們分別住在第 2 層到第 31 層的每一層（每層均有住人），試問電梯停在那一層，可以使這 30 個人不滿意的總分達到最低？（也可以選擇不坐電梯而直接走樓梯上樓）

7. 如下圖，長方形 $ABCD$ 被分割成四塊面積相等的區塊， $DWPA, ZWPQ, PQYX, ZQYBC$ ，其中 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{AB}$ 平行、 $\overline{XY} = \overline{YB} + \overline{BC} + \overline{CZ} = \overline{ZW} = \overline{WD} + \overline{DA} + \overline{AX}$ 、 $\overline{BC} = 19$ 、 $\overline{PQ} = 87$ ，試求 $\overline{AB}$ 線段長。



8. 在四邊形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = \angle CBA, \angle CDA = 90^\circ, \angle BCD = 78^\circ$ ， $\overline{AB} = 2\overline{AD}$ ，試求 $\angle CAD$ 的角度。

背面尚有試題

9. 規定：對於兩正整數 a, b ， $[a, b]$ 表示兩者的最小公倍數，例如： $[4, 6] = 12, [3, 7] = 21$ 。已知 x, y, z 均為正整數，試問有多少組有序數對 (x, y, z) 滿足 $[x, y] = 1000$ 、 $[y, z] = 2000$ 、 $[z, x] = 2000$ ？
10. 規定：一個正整數與其各數字之和的比值為該正整數的「自強值」，例如：1234 的自強值為 $\frac{1234}{10}$ 。試求所有三位數中，最小的自強值。
11. 平面中， D 為 $\triangle ABC$ 的內心， E 為 $\triangle ABD$ 的內心， F 為 $\triangle BDE$ 的內心，若 $\angle BFE$ 的度數為正整數，試求 $\angle BFE$ 的最小可能度數。
12. 規定：函數 $g(n)$ 表示第 n 個不是完全平方數的正整數，其中 n 為正整數。例如： $g(3) = 5, g(5) = 7, g(7) = 10$ 。試求 $g(2018)$ 之值。

二、證明題：

說明：本大題共有 2 題，請用黑色或藍色的原子筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題 20 分。

1. 假設 a, b 為正整數，且滿足 $2(\sqrt{\frac{15}{a}} + \sqrt{\frac{15}{b}})$ 為整數，試求滿足條件的有序數對 (a, b) 有幾組。
2. (1) 已知在凸四邊形 $ABCD$ 中，如果 $\angle ABC + \angle ADC = \angle BAC + \angle BDC = 180^\circ$ ，試證明：凸四邊形 $ABCD$ 具有外接圓。
- (2) 考慮平面中 $ABCD$ 四點，延伸線段 $\overline{AB}$ 與線段 $\overline{DC}$ ，交於點 P 。假若 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ ，試證明四邊形 $ABCD$ 具有外接圓。

試題結束