高雄市立高雄高級中學

108學年度科學班科學能力檢定試題卷

【數學能力檢定】試題卷

—作答注意事項—

考試時間：90分鐘

作答方式：

- 請依試題規定，將答案書寫於正確的空格及空白頁。
- 非選擇題使用較粗的黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆，在「答案卷」上作答。

祝考試順利

一、 填充題

說明：本大題共有12題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題5分。

1. 已知有一直角三角形的其中斜邊長為5，另外兩股長為α和β，且滿足$4\alpha^2-a\beta-3\beta^2=0$，請寫出另兩邊的邊長分別為何？

2. 設$y=ax^2+bx+c$ 和x軸交於相異兩點A和B，且該圖形頂點為C。若以$\overline{AB}$ 為直徑作一圓，則該圓恰通過C點，試求b^2-4ac的值為何？

3. 王老先生有一大片土地，但有塊地長滿了草，這塊長滿雜草的地大小為1000平方公尺。但因為王老先生年紀大了無法一次把整片地的雜草除乾淨，若是沒有除完下個月又會長出50平方公尺的雜草。例如，這個月若還有100平方公尺的雜草未除，則下個月的雜草面積就會是150平方公尺。若是王老先生想要每月一次，每次定量，並在第六次把整片地的草都清除乾淨，請問他每個月**至少**要除掉多少平方公尺的草才行？(無條件進入到整數)

4. 哈雷在好朋友牛頓的幫助下，成功計算出哈雷彗星將於西元1758年光臨地球，而且是18世紀中唯一的一次，同時也算出19世紀只會光臨地球一次。而另一方面，在中國的史書記載，哈雷彗星曾於十四、十七世紀皆光臨地球各2次，但十一、十二世紀則各只有1次，若已知哈雷彗星每P年會光臨地球一次（P為正整數），求$P=$ ______.

5. 高雄85大樓是高雄最高的摩天大樓，高度約350公尺，韓小瑜站在頂樓展望台的窗邊，行人小得像芝麻、汽車小得像抬著芝麻的螞蟻，高雄美景盡收眼底。如果天氣良好且沒有被山擋住，一直往外望，韓小瑜能看到的最遠地方，離他有多遠呢？（單位請用公里，且假設地球為一球體，半徑為6400公里，並四捨五入至整數）

背面尚有試題

6. A，B 兩男士失禮地詢問 C 女士的年齡，C 女士極不甘願地列出了 11 個可能的答案：

24，25，27，31，34，35，40，44，46，50，51，

接著 C 女士將她年齡的十位數告訴 A 男士，將她年齡的個位數告訴 B 男士。

A 男士說：我不知道 C 的年齡，但我想 B 也不知道。

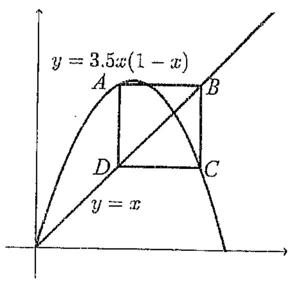
B 男士說：我原本也不知道 C 的年齡，但現在知道了。

A 男士說：那我也知道了。

請問 C 女士的年齡是幾歲？

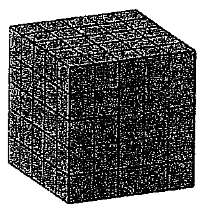
7. 數字與數字之間總是有著有趣的關係，請問是否有一個數字(正數)，它的小數部分與自己本身的平方和為 108 呢？如果有，請寫出這個數字。

8. 如圖(一)所示，在拋物線 $y=3.5x(1-x)$ 與直線 $y=x$ 上各取兩點，使它們成為一正方形 $ABCD$ 的 4 個頂點。求拋物線上所取的 A、C 兩點坐標分別為何？



圖(一)

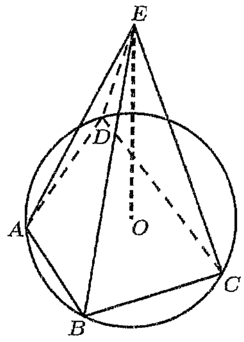
9. 如圖(二)，若用 125 個邊長為 1 的小正方體方塊，堆成一個邊長為 5×5×5 的大正方體，並在大正方體表面塗完油漆後再拆開，則會有 a 個小方塊被塗了 3 個面，b 個被塗了 2 個面，c 個被塗了 1 個面，d 個都沒塗到，求 $(a,b,c,d)=$ ？


圖(二)

10. 試求方程式 $\left|\left|\left|\left|x^2-x-1\right|-2\right|-3\right|-4\right|=x^2+x-20$ 的所有解。

11.如圖(三)，已知有一圓內接四邊形 $ABCD$ 內接於一圓 O，其四邊邊長分別為 $\overline{AB}=14$、$\overline{BC}=30$、$\overline{CD}=40$、$\overline{AD}=48$。

在圓心 O 正上方取一點 E，即使得 $\overline{OE}$ 垂直於圓 O 內任一條通過圓心 O 的直線。已知所做出的錐體 $E-ABCD$ 有一側面為正三角形，則 E 點最遠可以距離圓心 O 點多遠？



圖(三)

12. 隨著選舉越來越接近，各政黨也常透過電話民調來決定要派誰代表黨出馬參選。然而，各家民調公司在進行電話民調時，大多是透過電腦自動隨機撥號，看要做哪裡的民調就隨機撥打哪裡的家用電話。聰明的你馬上就看到一個大問題了:「家裡沒電話只有手機的人(純手機族)怎麼辦？」

為了研究這種狀況在民意調查中所造成的影響，在 2017 年的時候，三位數學家張鐙文、黃東益、洪永泰提出了解決方案，方案如下首先，先簡單將調查目標分成三類，分別為(1) 純家用電話族， (2)兩種都有， (3) 純手機族。然後民調時，他們一樣是先用傳統的市話電話民調打給全台灣的選民，問他們的各種政治議題態度。

但在問卷中，他多問了這些接起家用電話的選民「你有沒有手機？」，結果在上千個具代表性的家用電話受訪者中，有手機的佔 82%，沒有手機的人佔 18%。接著，他們使用隨機撥號的方式撥上千個手機號碼，透過手機民調的方式來打給全台灣有手機的民眾。除了問政治議題外，他們也另外問『你有沒有家用電話？』，結果有家用電話的人佔 64%，沒有家用電話的人佔 36%。

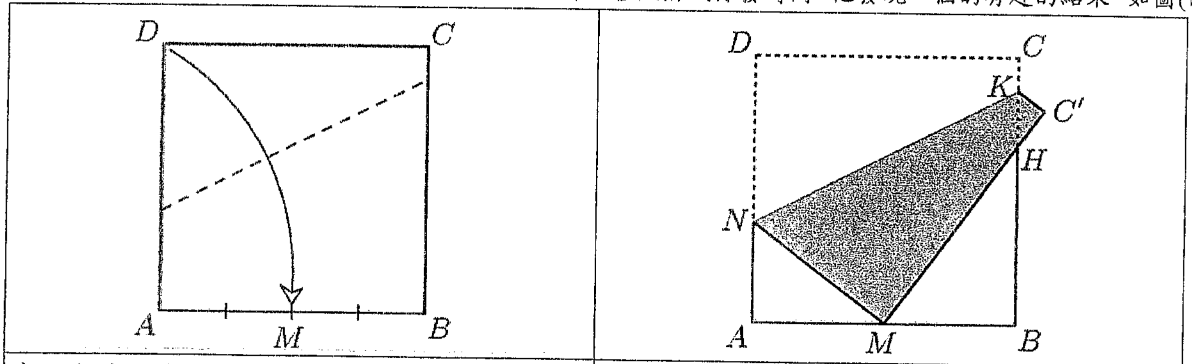
三位聰明的數學家宣稱這樣可以計算出三類的比例，進一步研究純手機族在民意調查中所造成的影響，聰明的你請試著計算看看 (1) 純家用電話族，(2)兩種都有，(3) 純手機族。這三類的比例到底是多少？

(請用百分比表示並四捨五入至整數位)

二、計算證明題

說明：本大題共有5 題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。請依題意將解答過程及最後結果寫在「答案卷」上正確題號之空格內，未詳列計算過程者不予計分。每題8分。

1. 日本筑波大學生物學教授芳賀和夫，在等待實驗結果的時候喜歡摺紙打發時間。他發現一個的有趣的結果，如圖(四)。

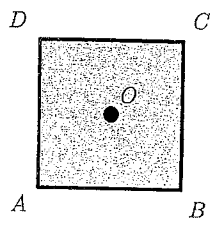


把正方形紙 $ABCD$ 的底 AB 對摺再打開得中點 M	再把角 D 摺向 M，得三角形 AMN

圖(四)

考慮三角形 AMN，試求出 $\overline{AN}:\overline{AM}:\overline{MN}=$__________

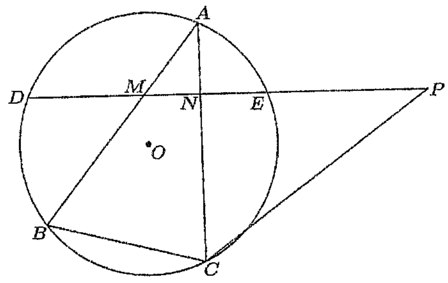
2. 喜歡游泳課的費爾在下課後仍不願回到教室上數學課，他的數學老師很生氣地要來泳池抓他。如圖(五)，若此時他正在正方形游泳池中央 O 點，老師（不會游泳）站在正方形的一個頂點，且老師奔跑的速度是他游泳速度的 3 倍，但費爾跑得比老師快，請問費爾會被老師抓回教室上數學課嗎？請寫下逃脫計畫。
（假設兩人都可以朝任何方向自由活動）



圖(五)

3. 如圖(六)，ΔABC內接於圓心為O的圓，P為圓外一點，D為圓上一點。設$\angle CPD=\angle A$，$\overline{PD}$交圓於E，

且$\overline{PD}$與$\overline{AB}$、$\overline{AC}$分別交於M、N，請證明$\overline{DN}\cdot\overline{NE}=\overline{MN}\cdot\overline{NP}$。



圖(六)

4. 有一邊長16的正三角形ABC，今在直線BC上取一點D，使得$D-B-C$且$\overline{BD}:\overline{CD}=1:5$；在$\overline{AB}$上取一點$E$使得$\overline{AE}=3$；在$\overline{AC}$上取一點$F$使得$\overline{AF}=10$；作$\overline{DF}$交$\overline{AB}$於$K$點，求$\Delta EFK$的面積。

5. 已知有一數列的一般項a_n 為$a\cdot r^{n-1}$，其中a和r皆不為0，S_n 為其第1項至第n項之和，我們可以透過以下方式求得S_n的值：

$$S_n=a+a\cdot r+a\cdot r^2+\cdots+a\cdot r^{n-1}$$

$$r\cdot S_n=\quad a\cdot r+a\cdot r^2+\cdots+a\cdot r^{n-1}+a\cdot r^n$$

將上下兩式相減得 $(1-r)\cdot S_n=a-a\cdot r^n \quad \Rightarrow S_n=\dfrac{a\cdot(1-r^n)}{1-r}$

例如，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\dfrac{1}{2^n}$

已知有一梯形之上底、高、下底為公差1的等差數列。n為自然數，假設當上底為$n+1$ 時，該梯形之面積為a_n；另一數列$\{b_n\}$的一般項$b_n=2^n(n+2)$；而數列$\{c_n\}$的一般項$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}$。設S_n為數列$\{c_n\}$中第1項到第n項之和，且當n 愈大時S_n 的值會會來愈接近4，若想要$|S_n-4|<\dfrac{1}{1000}$，則自然數n的最小值為何？

試題結束