高雄市立高雄高級中學

109學年度科學班科學能力檢定試題卷

【數學能力檢定】試題卷

—作答注意事項—

考試時間：90分鐘

作答方式：

- 請依試題規定，將答案書寫於正確題號之空格內。
- 非選擇題請使用較粗的「黑色」或「藍色」之原子筆、鋼珠筆或中性筆，在「答案卷」上作答。

祝考試順利

一、 填充題：

說明：本大題共有9題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題8分。

1. 平行四邊形 $ABCD$ 中，點 E 落在線段 $\overline{AB}$ 上，點 F 落在線段 $\overline{AD}$ 上， $\overline{CE}$ 、 $\overline{BF}$ 交於點 H ， $\overline{DE}$ 、 $\overline{BF}$ 交於點 G ， $\overline{CF}$ 、 $\overline{DE}$ 交於點 K 。若 $\triangle BHE$ 、 $\triangle GFK$ 、 $\triangle KFD$ 、 $\triangle CKD$ 的面積分別為 6、8、10、24，且四邊形 $AEGF$ 的面積為 14，則試求四邊形 $CKGH$ 的面積。

2. 試求方程組 $\begin{cases} x(x+1)(3x+y) = 144 \\ x^2 + 4x + y = 24 \end{cases}$ 的所有解。

3. 田徑場上，甲、乙兩人沿著環狀跑道的最內圈練習長跑，兩人從跑道上的相同位置同時出發，各自保持固定的速率依逆時針方向前進，但甲跑步的速率比乙快。經過一段時間後當甲第一次追上乙時，甲立即掉頭改依順時針方向前進；又經過一段時間甲、乙面對面相遇時，甲又立即掉頭改依逆時針方向前進；再經過一段時間後當甲第二次追上乙時，此時乙恰好跑了 8 圈。若以上過程中甲、乙跑步的速率都不變，且不考慮轉身耗損時間的情況下，試問甲跑步的速率是乙的多少倍？

4. 在 1, 2, 3, …, 2020 的正整數當中，有幾個數沒有用到 2, 0, 1, 9 這些數字？

5. 已知在三角形 $\triangle ABC$ 中，線段 $\overline{AM}$ 、 $\overline{AL}$ 、 $\overline{AH}$ 分別是 $\triangle ABC$ 的中線、角平分線、高，其中 H, L, M 均在線段 $\overline{BC}$ 上且各點的相對位置依序為 $B-H-L-M-C$ ，若 $\overline{ML}:\overline{LH}:\overline{HB} = 1:2:3$ ，試求 $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}$ 。

6. 定義高斯符號 $[]$ ：對於一數 x ， $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，例如 $[3.14]=3$ 、 $[-4.3]=-5$ 。

試求方程式 $x + \frac{109}{x} = [x] + \frac{109}{[x]}$ 的非整數解。

7. n 為正整數，定義 $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ ，例如 $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ 、 $10! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 10 = 403200$ 。

已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項 a_n 的值為 $n!$ 乘開後末位的0的個數，例如 $a_3 = 0$ 、 $a_5 = 1$ 、 $a_{10} = 2$ 。

試問在121、122、123、……、130當中，哪些數字不在數列 $\langle a_n \rangle$ 當中？

8. 假設 n 為不超過2020的正整數，且使得 $3^{n-1} \cdot n$ 為完全平方數。試求滿足這樣條件的 n 之個數。

9. 將24個相同大小的小長方形紙片，長寬方向不拘、邊與邊對齊不重疊地拼成一個無空隙的大長方形。已知拼成的大長方形與原來的小長方形相似，令小長方形的短邊長度為1，試求小長方形可能的長邊長度。

二、計算證明題：

說明：本大題共有3題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題12分。

10. 試證明：任意三角形 $\triangle ABC$ 的三中線相交於一點。

11. 請一位同學在紙上劃出 $\triangle ABC$ ，接著，自 A 點延長 $\overline{AB}$ 至 B' ，使 $\overline{AB'} = 2\overline{AB}$ ；自 B 點延長 $\overline{BC}$ 至 C' ，使 $\overline{BC'} = 2\overline{BC}$ ；自 C 點延長 $\overline{CA}$ 至 A' ，使 $\overline{CA'} = 2\overline{CA}$ 。將 $\overline{AB'}$ 、 $\overline{BC'}$ 、 $\overline{CA'}$ 以及 A 點、 B 點、 C 點擦拭乾淨，僅留下 A', B', C' 三個點，並將 $\triangle A'B'C'$ 的三邊連起來，然後將這張紙交給第二位同學。請問，第二位同學如何在看不到任何痕跡的情況下，根據紙上的 $\triangle A'B'C'$ 還原出 A, B, C 三個點的位置？（請說明作圖之步驟以及說明為何該作法可還原 $\triangle ABC$ 的位置）

12. 若實數 x, y, z, w 滿足 $x \geq y \geq z \geq w \geq 0$ 、 $9x + 6y + 3z + 11w = 2020$ ，試求 $x + y + z + w$ 之最大值。（請寫下完整且嚴謹之過程）

試題結束