

# 高雄市立高雄高級中學

## 110學年度科學班科學能力檢定試題卷

### 【數學能力檢定】試題卷

—作答注意事項—

考試時間：90分鐘

作答方式：

- 請依試題規定，將答案書寫於正確的空格及空白頁。
- 非選擇題使用較粗的「黑色」或「藍色」原子筆、鋼珠筆或中性筆，在「答案卷」上作答。

祝考試順利

一、 填充題：

說明：本大題共有12題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題10分。

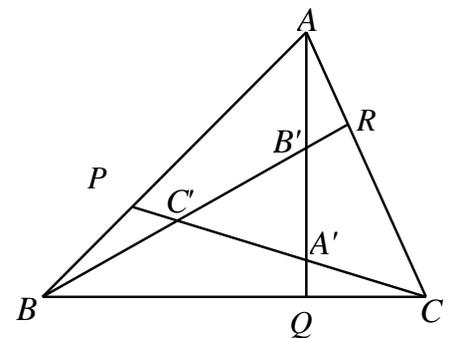
1. 若  $x$  為實數滿足  $\sqrt{x+2560} - \sqrt{2344-x} = 68$ ，試求  $28\sqrt{x+2560} + 27\sqrt{2344-x}$  的值為何？

2. 求解方程組  $\begin{cases} x + y + \frac{9}{x} + \frac{4}{y} = 10 \\ (x^2 + 9)(y^2 + 4) = 24xy \end{cases}$ ，其中  $x, y$  為實數。

3. 設  $x$  的實係數二次方程式  $ax^2 - 14x - 7 = 0$  有實根  $\alpha, \beta$ ，而  $y$  的實係數二次方程式  $y^2 - 2(b-1)y + b^2 - 2b = 0$  有實根  $\gamma, \delta$ ，且  $-2 \leq \gamma < \delta \leq 4$ ，又已知  $\frac{2}{\alpha + \beta} - \frac{6}{\alpha\beta} + 2(2\gamma - \delta^2) + 14 = 0$ ，求實數  $a$  的範圍為何？

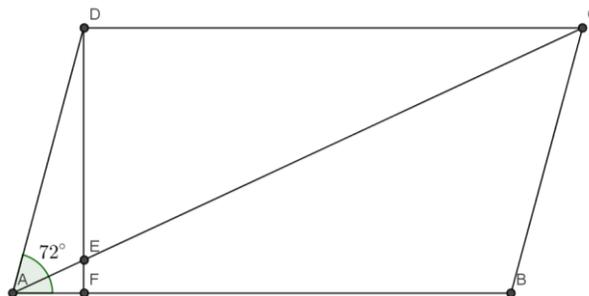
4. 達文西是義大利文藝復興時期一個代表人物，在各項領域都有顯著的成就，其中曾作一幅素描，已知此素描是由各面均為邊長相等的正五邊形和正三角形所組成的封閉多面體，且正五邊形的每邊都與正三角形共邊，正三角形每一邊也與正五邊形共邊，若此封閉多面體滿足頂點數-邊數+面數=2，則多面體的表面共有  $a$  個正五邊形， $b$  個正三角形，試問數對  $(a, b) = ?$

5. 如右圖所示，任意給定一個三角形  $\triangle ABC$ ，已知  $P, Q, R$  分別為  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$  三邊上的三點，且  $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{BQ} : \overline{QC} = \overline{CR} : \overline{RA} = 2 : 1$ ，若  $\overline{CP}, \overline{AQ}, \overline{BR}$  兩兩交於點  $A', B', C'$ ，且  $\triangle ABC$  的面積為15，試求  $\triangle A'B'C'$  的面積為何？



6. 已知  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，若對所有  $x \in [0, 1]$ ，恆有  $|f(x)| \leq 1$ ，求  $|a| + |b| + |c|$  的最大值為何？

7. 如右圖，平行四邊形  $ABCD$ ，若  $\angle BAD = 72^\circ$ ， $\overline{DF}$  垂直  $\overline{AB}$  交  $\overline{AC}$  於  $E$  點且  $\overline{CE} = 2\overline{AD}$ ，試求  $\angle CED$  的度數為何？

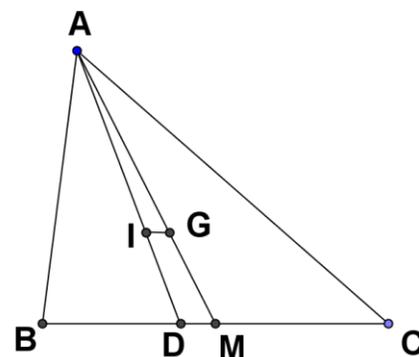


8. 已知等差數列  $\{a_n\}$  每一項均為自然數且  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ ， $n \geq 3$ ，若  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 110$ ，試問滿足這樣條件的等差數列  $\{a_n\}$  共有多少組？

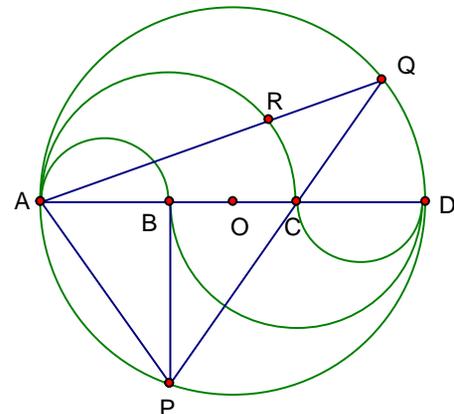
9. 設  $a_n$  表示與  $\sqrt{n}$  最接近的整數 ( $n$  為正整數)，試求  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} = ?$

10. 炭志郎從一副號碼 1 開始以連續自然數的卡片中抽取一張牌請彌豆子猜號碼，已知炭志郎給了彌豆子以下訊息：數字 " $\frac{559}{11}$ " 是除了剛剛抽取的卡片外，其他所有卡片編號的算術平均數。根據這樣線索請你幫彌豆子藉由準確的計算找到炭志郎所取的卡片編號為何？

11. 設  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 8$ ,  $\overline{BC} = 10$ ,  $\overline{AC} = 12$ ，若  $G$  與  $I$  分別為  $\triangle ABC$  之重心與內心，則  $\overline{GI}$  之值為何？



12. 如圖，半徑為 3 的大圓， $\overline{AD}$  為其直徑， $B, C$  在  $\overline{AD}$  上且三等分  $\overline{AD}$ ，以  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CD}$  分別為直徑作半圓，自  $B$  作直線垂直  $\overline{AD}$  交大圓於  $P$  點， $PC$  直線交大圓於  $Q$  點，連接  $\overline{AQ}$  交直徑  $\overline{AC}$  的圓於  $R$  點，試求  $\overline{QR}$  長度為何？



二、計算證明題：

說明：本大題共有 2 題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。務必將詳細計算證明過程寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題 15 分。

1. 實數  $a, b, c$  滿足  $a \neq 0$ ， $(b-1)^2 = 4ac$ ，試證明：下列 2021 個變數  $x_1, x_2, \dots, x_{2021}$  所滿足的聯立方程組

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = x_3 \\ \vdots \\ ax_{2020}^2 + bx_{2020} + c = x_{2021} \\ ax_{2021}^2 + bx_{2021} + c = x_1 \end{cases} \quad \text{有唯一解。}$$

2. 設  $P$  為三角形  $\triangle ABC$  內任意一點， $\overline{AP}, \overline{BP}, \overline{CP}$  的延長線分別交對邊  $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$  於點  $D, E, F$ ，且  $\overline{EF}$  交  $\overline{AD}$  於  $Q$  點，

證明： $\overline{PQ} \leq (3-2\sqrt{2})\overline{AD}$ 。

(試題結束)