

高雄市立高雄高級中學

111學年度科學班科學能力檢定試題卷

【數學能力檢定】試題卷

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 請依試題規定，將答案書寫於正確題號之空格內。
- 非選擇題請使用較粗的「黑色」或「藍色」之原子筆、鋼珠筆或中性筆，在「答案卷」上作答。

祝考試順利

一、 填充題：(70%) (註：答案可能不唯一，需全部答出才予計分)

說明：本大題共有10題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題7分。

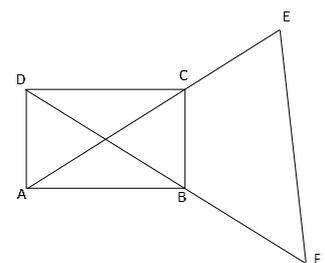
1. 求值： $\frac{2^{2022} - 2^{2020}}{2^{2022} + 2^{2021}} + \frac{2^{4044} - 2^{4040}}{2^{4044} + 2^{4042}} + \frac{2^{6066} - 2^{6060}}{2^{6066} + 2^{6063}} + \frac{2^{8088} - 2^{8080}}{2^{8088} + 2^{8084}}$ 。(以最簡分數表示)

2. 一數列： $(1^2 + 3)$ ， $(2^2 + 4)$ ， $(3^2 + 5)$ ， $(4^2 + 6)$ ， \dots ， $(2022^2 + 2024)$ 共有 2022 項，試問其中共有多少項是 4 的倍數。

3. 設整數 a, b 滿足 $2b - 3a = 111$ 且方程式 $x^2 + ax + b = 0$ 的解均為正整數，試求數對 (a, b) 。

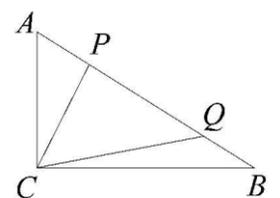
4. 如圖，矩形 $ABCD$ ， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ 。若在 \overline{AC} 上取一點 E 使 $\overline{CE} = 3$ ；

在 \overline{DB} 上取一點 F 使 $\overline{BF} = 4$ ，試求 \overline{EF} 的長度。



5. 如右圖，直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 20$ ， $\overline{BC} = 22$ ，且 $2\overline{AP} = \overline{PQ} = 2\overline{QB}$ ，

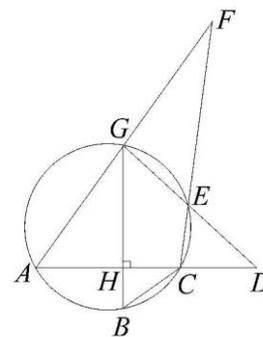
求值： $(\tan \angle ACP + \tan \angle CAP) \times (\tan \angle BCQ + \tan \angle CBQ)$ ？



6. 參考右圖，點 A, B, C, E, G 在一圓上， \overline{AC} 與 \overline{BG} 互相垂直且交於 H 點，

延長 \overline{AC} 與 \overline{GE} 交於 D 點，延長 \overline{AG} 與 \overline{CE} 交於 F 點。

已知 $\angle CBG = 43^\circ$ ， $\angle AFC = 49^\circ$ ， $\overline{GD} = 11$ ， $\overline{BH} = 2$ ，試求 $\overline{AH} \cdot \overline{HC}$ 之值。



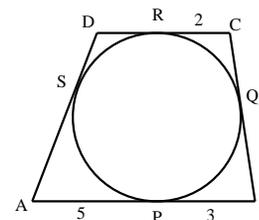
7. 投擲兩個公正的骰子，試問其點數積大於點數和的機率。

8. 設 a, b 均為正整數。數對 (a, b) 滿足 a, b 互質且 $ab = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 19 \times 20$ ，試問共有多少個不同的數對 (a, b) ？

9. 設 $f(x) = x^2 - 6|x|$ ，試問方程式 $f(f(x)) = 0$ 的實數解共有多少個？。

10. 如圖，梯形 $ABCD$ ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$) 內切圓與各邊切於點 P, Q, R, S 。若 $\overline{AP} = 5$ ， $\overline{PB} = 3$ ， $\overline{CR} = 2$ ，

試求 \overline{DR} 之長度。



二、計算證明題：(30%)

說明：本大題共有4題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。

11. 平面上有一個 $\triangle ABC$ ，分別以 \overline{BC} 、 \overline{CA} 、 \overline{AB} 為一邊，向 $\triangle ABC$ 的外部作正 m, n, p 邊形。

已知此三個正多邊形的外接圓在 $\triangle ABC$ 內部恰相交於一點。試證明： $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1$ 。(8%)

12. 設 x, y, z 為正整數且 $x \leq y \leq z$ 。若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{8}$ ，試求數對 (x, y, z) 所有可能的解。(7%)

13. 設 a, b, c 為相異之實數。若 $a+b+c=0$ ，且 $abc > 0$ ，

試問 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 之值為正數？負數？零？還是不能確定！請說明理由。(7%)

14. P 為銳角 $\triangle ABC$ 內部一點，設 P 到邊 \overline{BC} ， \overline{CA} ， \overline{AB} 的距離分別為 p_a ， p_b ， p_c ；

且 $\triangle ABC$ 在 \overline{BC} ， \overline{CA} ， \overline{AB} 邊上的高分別為 h_a ， h_b ， h_c 。試證明： $\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} + \frac{p_c}{h_c} = 1$ 。(8%)

試題結束