

一、填充題：(84%) (註：答案可能不唯一，需全部答出才予計分)

說明：本大題共有 14 題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷上」正確的題號之空格內。每題 7 分。

1. 已知 a 為二次方程式 $3x^2 - 2x - 663 = 0$ 的一個解，試求 $\left(3a^3 - 664\frac{1}{3}a - 445\right)^3$ 的值。

2. 設 $x > 0$ ，且 $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$ ，試求 $\sqrt{\frac{x}{x^2 + 9x + 1}} - \sqrt{\frac{x}{2x^2 + 11x + 2}}$ 的值。

3. 已知實數 a, b, c 滿足 $a \geq 0, b \geq 1, c \geq -1$ 以及 $a + 4b + c + 3 = 2\sqrt{a} + 4\sqrt{b-1} + 4\sqrt{c+1}$ ，試求 $a + b + c$ 的值。

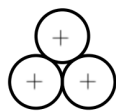
4. 數學中有個基本概念稱作「集合」，是一個收集特定元素所形成的物件。例如， $A = \{1, 2, 3\}$ 這個集合收集了 1, 2, 3 這三個正整數，又可以說 1, 2, 3 這三個元素「屬於」集合 A 。此外，如果集合 B 的所有元素也都屬於集合 A ，則說集合 B 是集合 A 的「子集」。例如， $B_1 = \{1, 2\}$ ， $B_2 = \{3, 2\}$ 都是集合 $A = \{1, 2, 3\}$ 的子集。根據上述語言，如果集合 $U = \{1, 2, 3, \dots, 2023\}$ ，且集合 M 是滿足「只要 n 屬於 M ， $17n$ 便不屬於 M 」的所有 U 的子集中擁有最多元素的一個，試問集合 M 的元素個數有多少個？

5. 有一個填符號遊戲，只要在最下層的○中填入符號「+」或「-」，則上層中所有的○就會自動顯示符號「+」或「-」其中之一。規則如下：

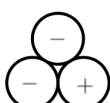
(1) 若相鄰的兩個○中符號相同，則上面的○顯示「+」，如圖一所示

(2) 若相鄰的兩個○中符號不同，則上面的○顯示「-」，如圖二所示

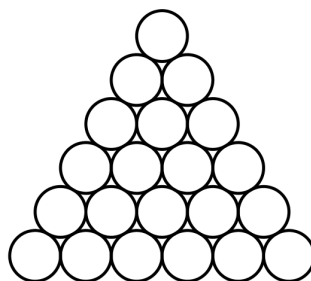
在圖三中，若要使得最上層的○中顯示「+」，則最下層有多少種填法？



圖一



圖二

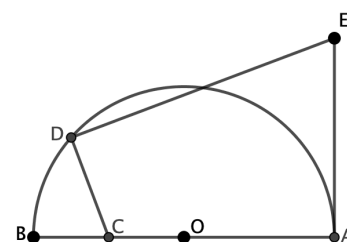


圖三

6. 將正整數 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots$ 依下列規則排列，若將橫排稱為列，直排稱為行，我們可以用列與行來描述某個正整數的位置。例如：第2列第3行的數字為9。若2023在第 m 列第 n 行，試求數對 (m, n) 。

1	3	4	10	11	21	...
2	5	9	12	20		
6	8	13	19			
7	14	18				
15	17					
16						
$\vdots$						

7. 如右圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓， O 為圓心， C 為 $\overline{OB}$ 中點。 $\overline{AE}$ 為圓 O 的切線， $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AE} = \sqrt{7}$ ，若 D 為此半圓上的一點且 $\overline{CD} \perp \overline{DE}$ ，試求 $\overline{CD}$ 的長。



8. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BC} = 15$ ， $\overline{AC} = 21$ ， I 為 $\triangle ABC$ 的內心，過 I 作平行 $\overline{BC}$ 的直線分別交 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 於 D, E 兩點，試求 $\overline{DE}$ 的長。

9. 在直角三角形 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $\overline{BC} = 13$ ， $\overline{AC} = 12$ 。已知存在一圓，其圓心落在線段 $\overline{AB}$ 上，該圓通過點 A ，且與線段 $\overline{BC}$ 相切，試求此圓的面積。

10. 已知銳角三角形 $\triangle ABC$ 的外心為 O ，線段 $\overline{OA}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點分別為 M, N 。假設 $\angle ABC = 4\angle OMN$ 、 $\angle ACB = 6\angle OMN$ ，試求角度 $\angle OMN$ 。

11. 在直角坐標平面上， O 為原點，方程式 $3x - y = 0$ 所表示的圖形為直線 L ，點 A 的坐標為 $(0,3)$ ，點 P 在直線 L 上，若 $\triangle AOP$ 為等腰三角形，試求點 P 的坐標。(答案不止一解)
12. 設 m, n 為正整數，若 $17m + 85n$ 是完全平方數且不超過 2023，則數對 (m, n) 共有多少組？
13. 請問有多少個整數 a ，能夠使得一元二次方程式 $x^2 + ax + 6a = 0$ 的解皆為整數？
14. 等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，點 D 落在邊 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BD} = 6$ 、 $\overline{DC} = 2$ 。四邊形 $DEFG$ 為正方形，落在三角形 $\triangle ABC$ 內部，點 F 落在 $\overline{AC}$ 邊上，且 $\overline{CG} < \overline{CE}$ 。若 $\overline{BE} = 3 \cdot \overline{CG}$ ，則正方形 $DEFG$ 的面積為何？

二、計算證明題：(16%)

說明：本大題共有 2 題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷上」正確的題號之空格內。

15. 是否存在三個整數 x, y, z 使得 $(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(y + z - x) = 20232$ ？(8%)
若存在，請寫出一組 (x, y, z) ，若不存在，請說明理由。(只寫是或否，本題不予計分。)
16. 說明 $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{64}$ 不是一個正整數。(8%)

試題結束