

高雄市立高雄高級中學

113學年度科學班科學能力檢定試題卷

【數學能力檢定】試題卷

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 請依試題規定，將答案書寫於正確的空格及空白頁。
- 非選擇題使用較粗的「黑色」或「藍色」原子筆、鋼珠筆或中性筆，在「答案卷」上作答。

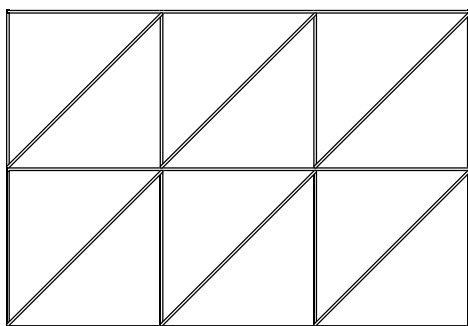
祝考試順利

一、 填充題

說明：本大題共有12題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題8分。

1. 試求
$$\frac{49\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)+289\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{7}\right)+361\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{17}\right)}{14\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)+34\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{7}\right)+38\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{17}\right)} = ?$$

2. 如下圖，這是由六個邊長皆為1的正方形所組成的矩形路徑圖，今規定從左下角頂點到右上角頂點只能走三種路徑：往上走、往右走，往右上斜走。請問所有走法的平均路徑長？



3. 試求解方程式 $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2-2x+2}=3$ ，全對才給分。
4. 在棒球比賽中，一位打者的打擊率定義為「總安打數除以總打擊數，四捨五入後取到小數點下第三位」。例如，雄雄本季的總打數為318次，總安打數為99次，則其打擊率為0.311。今天，若阿中本季的打擊率為0.399，試問阿中本季的「總打數」至少為多少？
5. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=22$ 、 $\overline{AC}=33$ ， $\angle BAC$ 的角平分線和 $\overline{BC}$ 交於點 D ，且 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CD}$ 皆為正整數，試問滿足上述條件的 $\triangle ABC$ 有幾個？
6. 已知奇數個數字的中位數定義如下：將這些數字由小到大排序之後，正中間那個數字稱為中位數。例如：
2,3,1,6,7,4,5 的中位數為4。今有 $S_1, S_2, \dots, S_{343}$ 等343個「數字群」，每個「數字群」都恰包含了7個整數，且所有這2401個數皆不相同。若將 $S_1, S_2, \dots, S_{343}$ 各自的中位數分別記作 $m_1, m_2, \dots, m_{343}$ ，且 $m_1, m_2, \dots, m_{343}$ 的中位數為 M ，試問這2401個數當中，「最多」可能有多少個數小於 M ？
7. 已知 $ABCD$ 為一梯形，其中 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 平行、 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 垂直。若兩對角線中較長的一條 $\overline{AC}=14$ ，兩平行邊中較長的一條 $\overline{CD}=10$ ，且較短的對角線 $\overline{BD}$ 及較短的平行邊 $\overline{AB}$ 皆長 x ，試問 $x = ?$
8. 觀察 $15=1+2+3+4+5=4+5+6=7+8$ ，因此15有3種寫成「至少兩個連續正整數和」的方法。試問420有多少種寫成「至少兩個連續正整數和」的方法？
9. 假設點 E, F 分別在正方形 $ABCD$ 的邊 $\overline{BC}$ 和 $\overline{CD}$ 上，滿足 $\angle EAF = 45^\circ$ ，且面積比為 $S_{\square ABCD} : S_{\triangle AEF} = 5:2$ ，試求線段比 $\overline{AB} : \overline{EF} = ?$

10. 令 $\{a_n\}$ 為一整數數列，其中 $a_1 = 1$ ，且對於任意正整數 n, m ，皆滿足 $a_{m+n} = a_m + a_n + mn$ ，試求 $a_{50} = ?$
11. 在正五邊形 $ABCDE$ 的內部有一個點 P ，已知 $\angle ABP = 6^\circ$ 、 $\angle AEP = 12^\circ$ ，試求 $\angle PAC = ?$
12. 若 p 為質數，且 $q = 4^p + p^4 + 4$ 也是質數，試求所有可能的 q 值之總和？

二、計算證明題

說明：本大題共有2題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題12分。

1. $\triangle ABC$ 為任意三角形， I 是其內心。若直線 $\overline{BI}$ 和 $\triangle ABC$ 的外接圓相交於點 D ，試證明： $\overline{DA} = \overline{DC} = \overline{DI}$ 。
2. 是否存在整數 m, n ，使得方程式 $5m^2 - 6mn + 7n^2 = 115$ 有解？若有，請寫下一組解；若沒有，請說明理由。