高雄市立高雄高級中學

114學年度科學班科學能力檢定試題卷

【數學能力檢定】試題卷

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 請依試題規定，將答案書寫於正確題號之空格內。
- 非選擇題請使用較粗的「黑色」或「藍色」之原子筆、鋼珠筆或中性筆，在「答案卷」上作答。

祝考試順利

一、　填充題：（註：答案可能不唯一，需全部答出才予計分）

說明：本大題共有12題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題10分。

1. 已知正整數n滿足$100 \le n \le 200$，且$n-1$與$n+1$均為質數，試求滿足上述條件的所有的正整數n當中，其正因數個數最多是幾個。

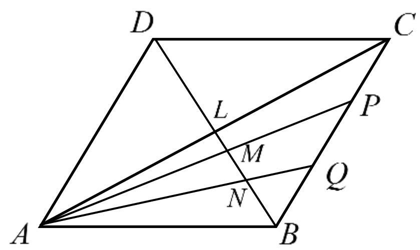
2. 在正ΔABC所在的平面上一點P，可使得ΔPAB，ΔPBC，ΔPAC均為等腰三角形，試求這樣的點P共有幾個。

3. 已知教室地板可以用n塊相同的正方形地磚所完整覆蓋，若用較小的相同的正方形地磚，則需要$(n+76)$塊才能覆蓋。已知n及地磚的邊長均為整數，試求n之值。

4. 已知$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-80x+1375+\left|x^2-80x+1375\right|\right)$，
試求$f(5)+f(15)+f(25)+f(35)+f(45)+f(55)+f(65)+f(75)+f(85)+f(95)$。

5. 已知x,y為實數，試求$5x^2+4xy+4y^2+10x+12y+5$的最小值。

6. 如圖所示，四邊形$ABCD$為平行四邊形，ΔABC、ΔABP、ΔABQ的面積分別為84、63、28，試求ΔAMN的面積。



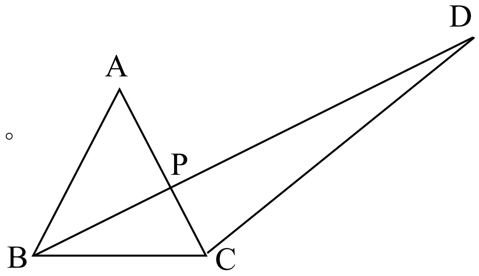
7. 將數字1,2,3,4,5,6,7,8,9填入3×3的9宮格當中，使得數字1和數字2相鄰、數字2和數字3相鄰、數字3和數字4相鄰、……、數字8和數字9相鄰，這樣的填數字的方法有幾種？

8. 熊熊高中有m位帶隊老師帶領n位學生參加一場校際交流活動，其中有一位學生擔任大隊長。活動結束後，大家為了表達感謝之意，決定互贈小禮物。每一位參加的同學，彼此互贈一份小禮物，並且每位學生也贈送一份小禮物給每一位帶隊老師，每一個帶隊老師也贈送一份小禮物給大隊長。經統計，禮物共送出51份，請問共有幾位帶隊老師？

9. 試解方程式$\sqrt[3]{x\sqrt{x-1}+26\sqrt{x-1}+9x+18}+\sqrt[3]{x\sqrt{x-1}+11\sqrt{x-1}-6x-2}=7$。

10. 如圖所示，ΔABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}$與$\overline{AC}$交於$P$點且$\angle A=2\angle BDC$。

若$\overline{AP}=11$且$\overline{PC}=7$，試求 $\overline{BP}\times\overline{PD}$。



11. 已知實數a,b,c滿足$\begin{cases} bc-a^2=5 \\ ca-b^2=-1 \\ ab-c^2=-7 \end{cases}$，試求$8a+9b+10c$之值。(不只一組解，全對才給分)。

12. 熊熊高中舉辦一場數學競賽，且這次的數學競賽共有 6 道試題，已知每道試題都恰有 50 名學生答對，但任意兩個學生中，至少有一道試題使得這兩個學生都沒有答對。請問，參加這次數學競賽的學生人數至少有幾人。

二、計算證明題：

說明：本大題共有2題，請用黑色或藍色的原子筆、鋼珠筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題15分。

1. 已知a,b為互質的正整數且$a>b\geq 1$，且$a\mid 10^k+1$，k為正整數。試回答下列問題：(備註：我們將p整除q記作$p\mid q$，此時p為q的因數。)

(1)若$a\mid 10^k+1$，請問正整數2,3,5三個數當中，那些可以是a的因數？(2 分)

(2)證明：若$a\mid 10^k+1$，則$a\mid \underbrace{99\cdots999\cdots9}_{2k位數}$。(5 分)

(3)根據(2)，可將$\frac{b}{a}$寫成$\dfrac{\overbrace{x_1x_2\cdots x_k}^{k位數}\overbrace{y_1y_2\cdots y_k}^{k位數}}{\underbrace{99\cdots999\cdots9}_{2k位數}}$，其中分母的每一位都是9、分子的每一位都是數字 0~9 且允許開頭為 0。

試證明：分子中每一組對應的$x_i+y_i=9$，$i=1,2,\cdots k$。(8 分)

例如：已知$7\mid 1001$，則$7\mid 999999$，可將$\frac{2}{7}$寫成$\frac{285714}{999999}$，發現分子的 6 位數中，$2+7=8+1=5+4=9$ 例如：已知$11\mid 11$，則$11\mid 99$，可將$\frac{3}{11}$寫成$\frac{27}{99}$，發現分子的 2 位數中，$0+9=9$

2. 將自然數$3,4,5,\ldots,1154,1155$ 排成一個數列$\{a_k\}$，使得數字k要為a_k的因數，其中$k=1,2,3,\ldots,1153$，試求滿足條件的排列種數。

試題結束