

高雄市立高雄高級中學 106 學年度科學班科學能力檢定數學科試題

注意：(1)本試題分為填充題與計算證明題兩大部分。填充題部分僅需將答案填入「答案卷」上正確題號之空格內；計算證明題部分請將計算證明過程書寫至指定欄位，違者不計分。
(2)試題卷請於繳交答案卷時 併繳回。

一、填充題：

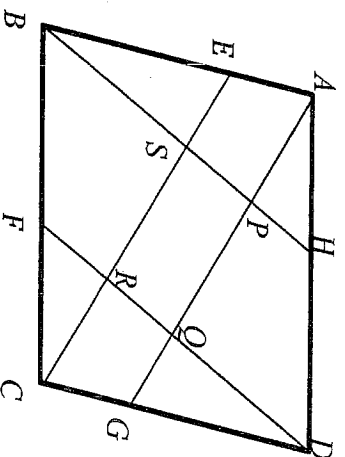
說明：本大題共有 12 題，請用黑色或藍色的原子筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題 10 分。

1. 長方形紙張 $ABCD$ ，已知 E 、 F 分別在 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 上，今沿著 $\overline{EF}$ 將長方形摺疊，頂點 C 正好落在 $\overline{AB}$ 的中點上，若 $\overline{AB} = 60$ 、 $\overline{BC} = 72$ ，試求 $\overline{EF}$ 之值。
2. $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 邊上，設 $\overline{EB}$ 、 $\overline{DC}$ 交於 O 點，若已知 $\angle EDO = \angle OCB$ ， $\triangle DEO$ 的面積 $= 14 - 8\sqrt{3}$ ， $\triangle BCO$ 的面積 $= 14 + 8\sqrt{3}$ ，試求 $\triangle ABC$ 的面積。
3. 已知實數 a, b, c 滿足以下關係式： $|a| \geq |b + c|$ ， $|b| \geq |c + a|$ ， $|c| \geq |a + b|$ 。假設 $a + b + c$ 的總和為 k ，試求所有可能的 k 值總和。
4. 從 1 到 2016 的正整數中，選出總和為 1017052 的 1008 個數，且這 1008 個數中，任兩數之和均不為 2017，試求這 1008 個數的平方和。(答案請化為最簡整數)
5. 已知有兩個三位數的正整數 m, n ，它們只有一個位數上的數字不同，且 m 為 n 的倍數，試問滿足上述條件的有序數對 (m, n) 共有幾組。
6. 已知 a, b, c, d 均為 1 到 9 的正整數，試求滿足 $a + bcd = ab + cd$ 的有序數對 (a, b, c, d) 有多少組。
7. 有一座天秤，左邊秤盤上放有 2,4,6,8 公克的砝碼各一個，右邊秤盤上放有 3,5,7,9 公克的砝碼各一個。天秤上砝碼重量總和大的向下傾斜，當兩邊秤盤砝碼之重量相等時，天秤維持平衡。今每次都從向下傾斜的秤盤中取走一個砝碼，重複操作，直到天秤平衡。試問：當天秤平衡時，砝碼全部取完的方法數共有多少種。
8. 有兩副撲克牌，每副皆有兩張鬼牌及 52 張牌。今每副牌的排列皆由上而下依序為：鬼牌一、鬼牌二、黑桃、紅心、方塊、梅花四種花色，每種花色的排列亦由上而下依序為：A, 2, 3, 4, ..., J, Q, K 的順序。小雄把上述排列的兩副撲克牌上下疊放在一起，然後由上到下把第一張丟掉，把第二張放在最底層，再把第三張丟掉，把第四張放在最底層，...。如此下去，直到最後只剩一張牌，試問所剩下的這張牌是什麼。(花色與點數同時答對才視為答對)。
9. 假設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$ 為等差數列，公差為 $\sqrt{2}$ ，且總和為 $44\sqrt{5}$ ，試求 $\frac{a_1^2}{a_1 \cdot a_3} + \frac{a_2^2}{a_2 \cdot a_4} + \frac{a_3^2}{a_3 \cdot a_5} + \frac{a_4^2}{a_4 \cdot a_6} + \frac{a_5^2}{a_5 \cdot a_7} + \frac{a_6^2}{a_6 \cdot a_8} + \frac{a_7^2}{a_7 \cdot a_9} + \frac{a_8^2}{a_8 \cdot a_{10}} + \frac{a_9^2}{a_9 \cdot a_{11}}$ 之值。
10. 假設 a, b, c, d 均為正整數，已知 $|a - b| = 2|b - c| = |c - d| = 2$ ，且 $|abcd - 388800| = 32400$ ，試求 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ 之值。
(有兩解)

11. 請觀察下表之規律。若排在第 x 列第 y 行位置的數字為 4951，試求有序數對 (x,y) 。

	第一行	第二行	第三行	第四行	第五行	……
第一列	1	4	16	46	106	……
第二列	2	11	37	92	……	
第三列	7	29	79	……		
第四列	22	67	……			
第五列	56	……				
……						

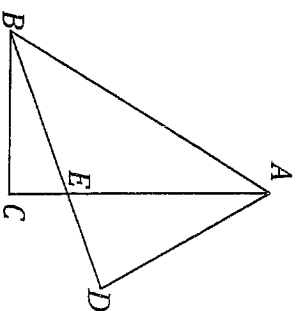
12. 平行四邊形 $ABCD$ 中，已知 E 、 F 、 G 、 H 分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 上，連接 $\overline{AG}$ 、 $\overline{BH}$ 、 $\overline{CE}$ 、 $\overline{DF}$ ，可得四交點 P 、 Q 、 R 、 S ，若 $2\overline{AE} = \overline{BE}$ 、 $2\overline{CG} = \overline{DG}$ 、 $3\overline{AH} = 2\overline{HD}$ 、 $3\overline{CF} = 2\overline{BF}$ ，試求四邊形 $PQRS$ 的面積比四邊形 $ABCD$ 的面積之比值。



二、計算證明題：

說明：本大題共有 2 題，請用黑色或藍色的原子筆或中性筆書寫。答案務必寫在「答案卷」上正確題號之空格內。每題 20 分。

1. 設 $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC}$ 平分 $\angle BAD$ 且交 $\overline{BD}$ 於 E ， $\overline{AC} = 15$ ， $2\overline{AB} = 3\overline{AD}$ ，試求 $\overline{AE}$ 。



2. 假設 $1 \leq p \leq 20$ ， $1 \leq q \leq 10$ ，且方程式 $4x^2 - px + q = 0$ 的兩根均為奇數，試求此方程式的最大根之值。

試題結束