

給即將成為雄中新鮮人的你

完成國中三年的學業，恭喜你成為雄中高一新生，即將迎來多采多姿的高中生活。

在正式開始高中的學業之前，在未來高中數學的學習上，為了幫助你能順利銜接高中的數學課程，同時有一個好的開始。本教材提供給你在暑假期間自行研讀、練習，本教材的內容大多是你在國中時學過的，少部分的練習你必需詳加研讀本教材才能完成。本教材分為六大主題 (Topic)，共有 74 題練習題，練習時沒有必要刻意按照順序，尤其第三個主題多項式中可能有較困難的題目需要用到第四個主題的配方法，如果你在多項式遇到難題且你不熟悉配方法，那麼應當先完成主題四的配方法後，再回到多項式的地方思考這些難題。

你應該自己安排時間，大約分散在一個月左右的時間把它們全部完成。注意：本教材並不困難，希望你盡可能的「只靠你自己一個人獨立完成」所有的練習題（當然可以查閱國中的課本或筆記，但不要輕易的尋求補習班或他人或網路上的任何資源。）。遇到困難或不會寫的題目，平常練習比起考試沒有時間壓力，可以多花一點時間思考，或者是休息一段時間（可以是幾個小時、兩三天、甚至是一週，74 題並不多而暑假很長，不用太擔心會寫不完。）再重新思考這道題目，這將對你的數學學習非常有幫助。

本教材的練習，並未留有空白處可將答案寫下。建議你準備一本簿子（最好是活頁的，方便隨時變更順序。），將所有的題目當做是計算、證明題將答案寫在簿子裡，將來也方便複習及查閱。除了證明題外，所有的題目都有簡答。開學時，將有一個開學考試，數學科的考試範圍則是以本教材的內容為主。最後祝你學業順利、暑假愉快。

Topic 1 數的基本計算

乘法公式:

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2) (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(3) a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(4) (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(5) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(6) (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(7) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(8) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

1. 求出 $\frac{125}{8} \times \left(-\frac{10}{3}\right) - \left(-\frac{5}{8}\right) \div \frac{3}{10}$ 的值.

Ans: -50

2. 求出 $\frac{5}{9} - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{12}\right) \div \frac{5}{9}$ 的值.

Ans: $-\frac{115}{36}$

3. 求出 $-\frac{37}{4} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{7}{4} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\right)\right)$ 的值.

Ans: $-\frac{17}{2}$

4. 求出 $536 \times 0.52 - 364 \times 0.48 - 364 \times 0.52 + 536 \times 0.48$ 的值.

Ans: 172

5. 求出 $2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}$ 的值.

Ans: $\frac{157}{68}$

6. 求出 $\frac{\frac{2}{3} - \frac{7}{5}}{-\frac{3}{2} + \frac{-5}{4}} + \frac{3 \cdot \left(\left(\frac{6}{5}\right)^3 - 1\right)}{\frac{6}{5} - 1}$ 的值.

Ans: $\frac{839}{75}$

7. 化簡 $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{11} - 3} + \frac{8}{\sqrt{11} + \sqrt{3}}$.

Ans: -1

8. 比較兩數 $a = \sqrt{8} + \sqrt{3}$ 與 $b = \sqrt{7} + \sqrt{4}$ 的大小.

Ans: $a < b$

9. 求出 $\sqrt{198 + \frac{1}{196}}$ 的值.

Ans: $\frac{197}{14}$

10. 已知 $a + \frac{1}{a} = 4$ 且 $0 < a < 1$, 計算下列式子的值.

(1) $a^3 + \frac{1}{a^3}$.

(2) $a - \frac{1}{a}$.

(3) $a^5 + \frac{1}{a^5}$.

Ans: (1) 52 (2) $-2\sqrt{3}$ (3) 724

11. 計算 $2^2 + 37^2 + 61^2 + 2 \cdot 74 + 2 \cdot 2257 + 2 \cdot 122$ 的值.

Ans: 10000

12. 試利用乘法公式求出 99^3 的值.

Ans: 970299

13. 因式分解 $x^6 - y^6$.

Ans: $(x + y)(x - y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$

Topic 2 數列與級數

13. 設 α 、 β 為 $x^2 - 17x + 52 = 0$ 之兩根, 若在 α 、 β 之間插入 a 、 b 兩數, 其中 $a < b$ 使其成為等差數列, 求出數對 (a, b) .

Ans: (7, 10)

14. 已知兩數的乘積 56, 等差中項為 9, 求出此兩數.

Ans: 4, 14

15. 有一三角形的三內角度數成等差數列, 若最大角是最小角的 5 倍, 求出最小角的度數.

Ans: 20°

16. 已知有四數成等差數列, 且公差大於 0, 其和為 20, 首末兩項之積為 -11 , 求出此數列.

Ans: $-1, 3, 7, 11$

17. 已知一等差級數的前 20 項之和為 -470 , 前 19 項之和為 -418 , 求出首項及公差.

Ans: 首項 5, 公差 -3

18. 一等差級數的前 n 項和 $S_n = -2n^2 + 3n$, 求出第 21 項.

Ans: -79

19. 在 55 與 143 之間插入 10 個數, 使所成的 12 個數成一等差數列, 回答下列問題:

(1) 求出公差.

(2) 所插入的第 9 個數為多少?

(3) 求出所插入的 10 個數的和.

Ans: (1) 8 (2) 127 (3) 990

20. 令一次函數 $f(n) = 200 - 3n$, n 為正整數, 欲使 $f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ 的和為最大, 最大的和為多少?

Ans: 6567

21. 有一等差級數, 首項為 -32 , 第 17 項為 -20 , 回答下列問題:

(1) 第幾項開始為正數?

(2) 若正整數 n 滿足第 1 項加到第 n 項的和大於 0 , 求出 n 的最小值.

Ans: (1) 44 (2) 87

22. 一等比數列之首項為 2 , 公比為 -3 , 試求出第 6 項.

Ans: -486

23. 求出 3 與 12 的等比中項.

Ans: ± 6

24. 已知 $a, 2, b, 3, c$ 為一等比數列, 且公比大於 0 . 求出數對 (a, b, c) .

Ans: $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \sqrt{6}, \frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$

25. 計算 $\frac{3}{10} + \frac{3}{40} + \frac{3}{88} + \frac{3}{154} + \frac{3}{238} + \frac{3}{340}$.

Ans: $\frac{9}{20}$

Topic 3 多項式

多項式的四則運算：

想必大家在國中時已學會了多項式的四則運算，例如在用直式作多項式的除法時，應注意缺項補 0。而通常為了計算上的簡潔或方便，常將 x 的次方省略，只留下係數，此種方法稱為「分離係數法」。例如：計算 $(6x^2 - 7x - 6) \div (2x + 1)$ 用分離係數法計算如下：

$$\begin{array}{r} 3 \quad -5 \\ 2 \quad +1 \overline{) 6 \quad -7 \quad -6} \\ \underline{6 \quad 3} \\ -10 \quad -6 \\ \underline{-10 \quad -5} \\ -1 \end{array}$$

得商式 $3x - 5$ 餘式 -1 。

若多項式 $f(x)$ 為非零多項式，可用符號 $\deg f(x)$ 表示多項式 $f(x)$ 的次數。

例如： $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ， $\deg f(x) = 2$ 。 $g(x) = 5$ ， $\deg g(x) = 0$ 。

26. 令 $f(x) = 4x^3 - 3x + 4$ 、 $g(x) = x^2 + x - 1$ ，求 $f(x) \div g(x)$ 的商式 $q(x)$ 和餘式 $r(x)$ 。

Ans: $q(x) = 4x - 4, r(x) = 5x$

27. 試問下列何者為 $x^2 - 1$ 的因式？(A) $-x + 1$ (B) $x + 1$ (C) $2x - 2$ (D) $\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$ (E) $-2x^2 + 2$ 。

Ans: $ABCDE$

28. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x - 5$ 得商式為 $2x + 3$ ，餘式為 5，求出此多項式 $f(x)$ 除以 $2x - 1$ 所得之商式 $q(x)$ 及餘式 $r(x)$ 。

Ans: $q(x) = x - 3, r(x) = -13$

29. 設有兩多項式 $f(x)$ 、 $g(x)$ ，且 $\deg f(x) = m, \deg g(x) = n$ ，其中 $m > n$ 。回答下列問題：

(1) 求出 $\deg[f(x) + g(x)]$ 。

(2) 求出 $\deg[f(x) - g(x)]$ 。

(3) 求出 $\deg[f(x) \cdot g(x)]$ 。

(4) 若 $g(x) \neq 0$ ，令 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式為 $q(x)$ ，求出 $\deg q(x)$ 。

(5) 若 $g(x) \neq 0$ ，且 $g(x)$ 不整除 $f(x)$ ，令 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的餘式為 $r(x)$ ， $\deg r(x)$ 最大為多少？(用 m, n 表示)

Ans: (1) m (2) m (3) $m + n$ (4) $m - n$ (5) $n - 1$

30. 設 $f(x) = x^2 + x + 1$ ， $g(x) = a^2x^2 + ax + 3$ ，回答下列問題：

(1) 若 $\deg(f(x) - g(x)) = 1$ ，求出 a 的值。

(2) 若 $\deg(f(x) - g(x)) = 0$, 求出 a 的值.

Ans: (1) -1 (2) 1

31. 因式分解下列各式:

(1) $8x^3 - 27$

(2) $(x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4) - (x^2 + 2)(x^4 + 2x^2 + 4)$

Ans: (1) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$ (2) $-4x^2(x^2 + 2)$

32. 因式分解下列各式:

(1) $x^4 - 10x^2 + 9$

(2) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 63$

Ans: (1) $(x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1)$ (2) $(x^2 + 5x + 13)(x^2 + 5x - 3)$

33. 因式分解 $x^4 + 64$.

Ans: $(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$

34. 已知 $2x + 3$ 為 $8x^2 + ax + 9$ 的因式, 求出 a 的值.

Ans: 18

35. 令 $f(x) = 3x^2 + ax + b$, 且 $f(2) = 8, f(-3) = 48$, 求出 $f(x)$.

Ans: $3x^2 - 5x + 6$

36. 畫出下列各函數的圖形:

(1) $y = -x + 5$, 其中 $x \geq 0, y \geq 0$.

(2) $y = x + 1$, 其中 $x < 5$ 且 x 為正整數.

Ans: 略

37. 兩一次函數 $y = 2x + 6$ 與 $y = -x + 3$, 已知此兩函數的圖形與 x 軸圍成一個三角形, 求出此三角形的面積.

Ans: 12 平方單位

38. 已知 a, b 為實數, 若 $x^4 - 3ax^2 + bx + 4$ 之其中兩因式為 $2x + 2$ 與 $x - 2$, 求出數對 (a, b) .

Ans: $(\frac{5}{3}, 0)$

39. 將函數 $y = ax^2 - 6x + 2$ 向左平移 3 個單位長, 再向上平移 5 個單位長後, 會與 $y = -x^2 + bx + c$ 的圖形重合, 求出 $b - c$ 的值.

Ans: 8

40. 已知一個二次函數之對稱軸 $x = 1$, 且通過 $(-1, 6), (2, 3)$, 求出此二次函數.

Ans: $y = (x - 1)^2 + 2$

41. 坐標平面上, 某二次函數的頂點為 $(2, -1)$, 此函數圖形與 x 軸相交於 P 、 Q 兩點, 且 $\overline{PQ} = 6$. 若此函數通過 $(1, a)$ 、 $(3, b)$ 、 $(-1, c)$ 、 $(-3, d)$ 四點, 下列何者正確? (A) $abcd < 0$ (B) $abcd = 0$ (C) $abcd > 0$.

Ans: B

42. 坐標平面上, 二次函數 $y = -x^2 + 6x - 9$ 的圖形的頂點為 A , 且此函數圖形與 y 軸交於 B 點. 若在此函數上取一點 C , 在 x 軸上取一點 D , 使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形, 求出 D 的坐標.

Ans: $(9, 0)$

43. 坐標平面上有一頂點為 $A(-3, 0)$ 的拋物線, 此拋物線與方程 $y = 2$ 的圖形交於 B 、 C 兩點, 且 $\triangle ABC$ 為正三角形. 求出此拋物線與 y 軸的交點坐標.

Ans: $(0, \frac{27}{2})$

Topic 4 二次多項式的配方法

有關二次多項式的計算裡, 有時需要將二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 化為 $a(x - h)^2 + k$ 的形式 (其中 $a \neq 0$), 見下例:

將 $x^2 + 6x + 8$ 化為 $a(x - h)^2 + k$ 的形式:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 8 \\ &= x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2 + 8 \\ &= (x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) - 3^2 + 8 \\ &= (x + 3)^2 + (-1) \\ &= (x - (-3))^2 + (-1) \end{aligned}$$

上面的過程稱為「配方法」, 而透過配方法, 在上例中你是不是能解出方程式 $x^2 + 6x + 8 = 0$? (試試看, 它有兩解為 -2 或 -4). 事實上, 透過這個方法我們可以得到二次多項式方程式的公式解, 見下面習題第 52 題.

下面這個超連結提供一個簡短的動畫幫助你瞭解配方法.

<https://www.wikiwand.com/zh-tw/配方法>

42. 將二次多項式 $x^2 + 6x + 9$ 化成 $(x - h)^2 + k$ 的形式.

Ans: $(x + 3)^2$

43. 將二次多項式 $x^2 + 4x + 5$ 化成 $(x - h)^2 + k$ 的形式.

Ans: $(x + 2)^2 + 1$

44. 將二次多項式 $x^2 - 2x + 3$ 化成 $(x - h)^2 + k$ 的形式.

Ans: $(x - 1)^2 + 2$

45. 將二次多項式 $x^2 - 3x + 1$ 化成 $(x - h)^2 + k$ 的形式.

Ans: $(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$

在上面提到的配方法中有時二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 中的 $a \neq 1$ ，此時做配方法時 提出 a 將使得計算上容易些，見下例：

$$\begin{aligned} 2x^2 + 20x - 1 &= 2(x^2 + 10x) - 1 \\ &= 2(x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 - 5^2) - 1 \\ &= 2[(x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2) - 25] - 1 \\ &= 2(x + 5)^2 - 51 \end{aligned}$$

46. 將二次多項式 $2x^2 - 24x + 72$ 化成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。

$$\text{Ans: } 2(x - 6)^2$$

47. 將二次多項式 $4x^2 + 8x - 1$ 化成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。

$$\text{Ans: } 4(x + 1)^2 - 5$$

48. 將二次多項式 $-3x^2 + 12x + 2$ 化成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。

$$\text{Ans: } -3(x - 2)^2 + 14$$

49. 將二次多項式 $-9x^2 - 6x - 1$ 化成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。

$$\text{Ans: } -9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$$

50. 將二次多項式 $2x^2 + 5x + 3$ 化成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。

$$\text{Ans: } 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

51. 將二次多項式 $-x^2 + 7x + 2$ 化成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。

$$\text{Ans: } -\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{57}{4}$$

52. 設 a, b, c 均為實數，且 $a \neq 0$ 。將二次多項式 $ax^2 + bx + c$ 化成 $a(x - h)^2 + k$ 的形式。並解方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 。

$$\text{Ans: } a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2+4ac}{4a}, x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ (其中 } b^2 - 4ac < 0 \text{ 時, 此二次方程式無實數解)}$$

Topic 5 二次不等式

解二次不等式:

我們看一個例子, 想要解不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$, 首先將 $y = x^2 - 2x - 3$ 的圖形畫出來 (令 $f(x) = x^2 - 2x - 3$, 注意到圖形上的點 (x, y) 中 $y = f(x)$, 例如: $f(1) = -4$, $f(2) = -3$, $f(\sqrt{2}) = -1 - 2\sqrt{2}$, 很多時候我們用 $f(x)$ 表示這個函數), 並將 $f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點的 x 坐標標在圖形上 (注意到此 x 坐標即為 $f(x) = 0$ 的根). 而 $f(x) = 0$ 的根有 $-1, 3$. 由 $f(x)$ 的圖形可看出:

(1) 若 $x < -1$ 或 $x > 3$, 則 $f(x) > 0$, 反之亦成立.

(2) 若 $-1 < x < 3$, 則 $f(x) < 0$, 反之亦成立.

(3) 若 $x = -1$ 或 $x = 3$, 則 $f(x) = 0$, 反之亦成立.

所以 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解為 $-1 < x < 3$. 而 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ 的解為 $-1 \leq x \leq 3$.

53. 解二次不等式 $-x^2 - x + 2 < 0$.

Ans: $x < -2$ 或 $x > 1$.

54. 解二次不等式 $2x^2 + 2x - 3 < 0$.

Ans: $\frac{-1-\sqrt{7}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$.

55. 解二次不等式 $2x^2 - 2x - 1 > 0$.

Ans: $x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 或 $x > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

56. 解二次不等式 $x^2 + 6x + 9 > 0$.

Ans: x 為任意實數但 $x \neq -3$.

57. 解二次不等式 $x^2 - x + 3 > 0$.

Ans: 任意實數.

58. 解二次不等式 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$.

Ans: $-1 \leq x \leq 3$

59. 解二次不等式 $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$.

Ans: $x \leq -1$ 或 $x \geq 3$

60. 解二次不等式 $x^2 - 2x + 1 \geq 0$.

Ans: 任意實數.

61. 解二次不等式 $x^2 - 2x + 1 \leq 0$.

Ans: $x = 1$

Topic 6 平面幾何

三角形的內分比性質 (內角平分線定理):

平面上一 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 之角平分線, 則

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

證明: 分別做 $\overline{DE}$ 、 $\overline{DF}$ 垂直直線 AB 、直線 AC 於 E 、 F

因為 $\angle EAD = \angle FAD$, $\angle AED = \angle AFD = 90^\circ$,
 $\overline{AD} = \overline{AD}$, 所以 $\triangle ADE \cong \triangle ADF$ (AAS 全等).
 得 $\overline{DE} = \overline{DF}$.

由

$$\frac{\triangle ABD \text{ 的面積}}{\triangle ACD \text{ 的面積}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{DE}}{\frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{DF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

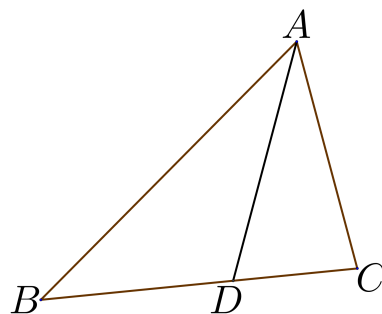
另一方面, 令 h 為 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC}$ 上的高.

那麼

$$\frac{\triangle ABD \text{ 的面積}}{\triangle ACD \text{ 的面積}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \overline{BD} \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$

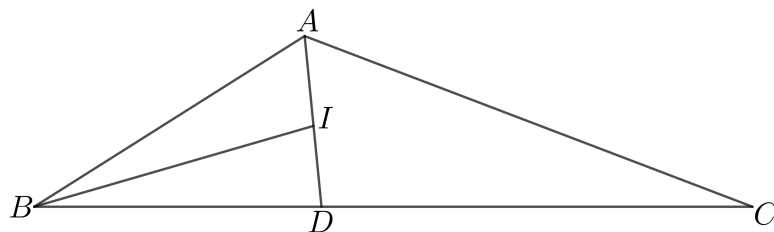
所以

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$



58. 如下圖, $\triangle ABC$ 中, $\overline{AB} = 8$, $\overline{BC} = 18$, $\overline{CA} = 12$. $\overline{AD}$ 、 $\overline{BI}$ 分別平分 $\angle BAC$ 、 $\angle ABC$. 求出 $\frac{\overline{AI}}{\overline{DI}}$.

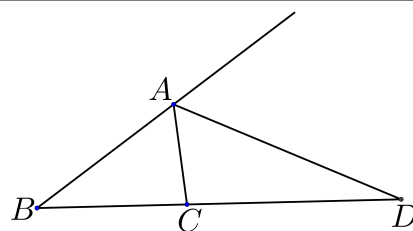
Ans: $\frac{10}{9}$



三角形的外分比性質 (外角平分線定理):

平面上一 $\triangle ABC$ 中, D 為 $\angle A$ 之外角平分線與直線 BC 之交點, 則

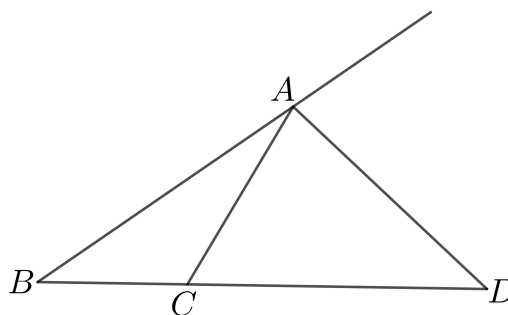
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$$



59. 證明上述三角形的外分比性質 (外角平分線定理). [提示: 延長 $\overline{AB}$ 取一點 E , 使得 $\overline{AE} = \overline{AC}$ (注意: 要讓 C 、 E 在直線 AD 的兩側), 用兩種方法計算 $\frac{\triangle ABD \text{的面積}}{\triangle AED \text{的面積}}$ (類似內角平分線定理的證明).]

60. 如右圖, 平面上一 $\triangle ABC$ 中, D 為 $\angle A$ 之外角平分線與直線 BC 之交點, 且 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 2$, 求出 $\overline{CD} : \overline{BC}$.

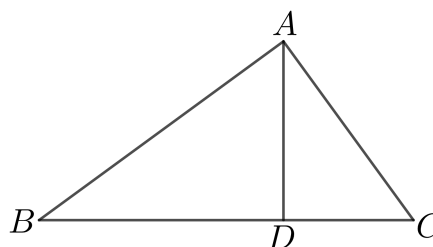
Ans: 2 : 1



直角三角形的母子相似性質:

如右圖, 平面上一直角三角形 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$.

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D , 則 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ 且 $\triangle ABC \sim \triangle DBA$.

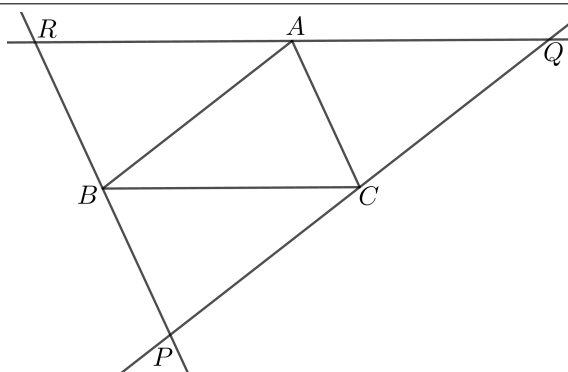


61. 證明上述直角三角形的母子相似性質.

三角形的垂心:

定理: 若 $\triangle ABC$ 的三個高分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$, 則直線 AD 、直線 BE 、直線 CF 交於一點 H . 點 H 稱為 $\triangle ABC$ 的垂心.

如右圖, 請試著完成下面的練習題, 證明上面的定理.



62. 如圖 (上面框框中的圖), 銳角 $\triangle ABC$ 中, 分別過 A 、 B 、 C 作直線平行 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$, 此三直線交於 P 、 Q 、 R 三點. 完成下列問題.

(1) 證明四邊形 $ABCQ$ 為平行四邊形.

(2) 證明 $\overline{AQ} = \overline{AR}$.

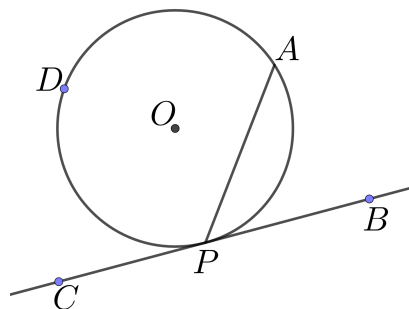
(3) 作 $\triangle ABC$ 的三個高 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 分別垂直於直線 BC 、直線 CA 、直線 AB 於 D 、 E 、 F . 證明 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 交於一點 H .

63. 已知鈍角 $\triangle ABC$ 的三個高分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$, 證明直線 AD 、直線 BE 、直線 CF 交於一點 H .

64. 已知 $\triangle ABC$ 的三個高分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ ，證明直線 AD 、直線 BE 、直線 CF 交於一點 H 。點 H 稱為 $\triangle ABC$ 的垂心。

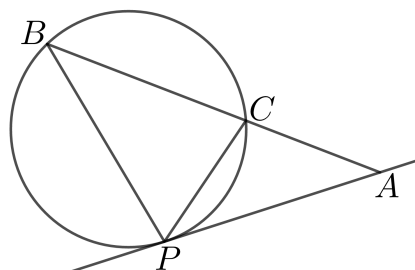
弦切角的基本性質：

過圓上同一點的弦與切線所夾的角稱為「弦切角」。如右圖，平面上圓心為 O ，直線 BC 切圓於 P 點， $\overline{AP}$ 為圓的弦，則 $\angle APB = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ 且 $\angle APC = \frac{1}{2}\widehat{ADP}$ 。



65. 證明上述弦切角的基本性質。[提示：過 P 作圓的直徑 $\overline{EP}$ ，並利用圓弧所對圓周角等於該弧度數的一半.]

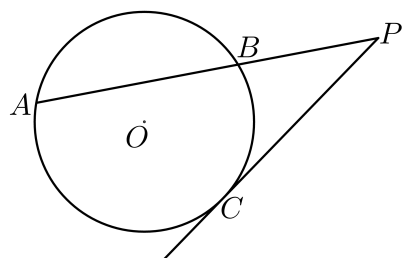
66. 如右圖，直線 AP 切圓於 P ，直線 AB 交圓於 B 、 C 兩點，證明 $\triangle ABP \sim \triangle APC$ 。



圓幂性質一：

如右圖平面上一圓 O 中， $\overline{AB}$ 為圓 O 的弦， $\overline{CP}$ 為圓 O 之切線，切於 C 點， $\overline{AB}$ 與 $\overline{CP}$ 交於圓外一點 P ，則

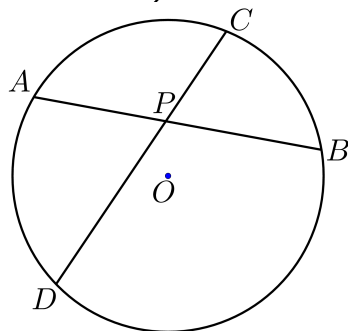
$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP}^2$$



圓幂性質二：

如右圖平面上一圓 O 中， $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 為圓 O 上的相異兩弦交於圓內一點 P ，則

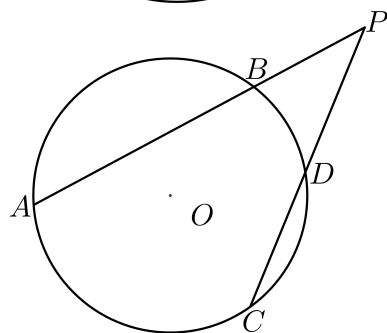
$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$$



圓幂性質三：

如右圖平面上一圓 O 中， $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 為圓 O 上的相異兩弦，延長此兩弦交於圓外一點 P ，則

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$$



67. 證明上述圓幂性質一.[提示：利用第 63 題的結果.]

68. 證明上述圓幂性質二.[提示：證明 $\triangle ADP \sim \triangle CBP$.]

69. 證明上述圓幂性質三.[提示：連接 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$.]

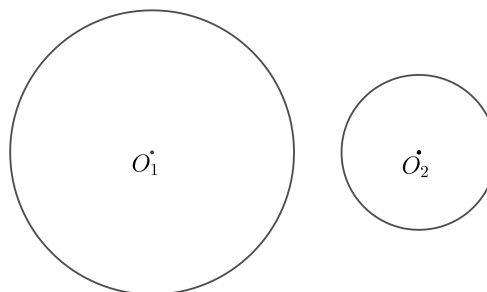
70. 承第 65 題，證明 $\angle BPC = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{BC} + \widehat{AD})$.

71. 承第 66 題，證明 $\angle APC = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{AC} - \widehat{BD})$.

兩相異圓的關係: 令平面上兩相異圓的圓心分別為 O_1 、 O_2 , 半徑分別為 r_1 、 r_2 且 $r_1 \geq r_2$. 直線 O_1O_2 稱為兩圓的「連心線」, $\overline{O_1O_2}$ 稱為兩圓的「連心線段」. 此兩圓的關係共有下列五種情況:

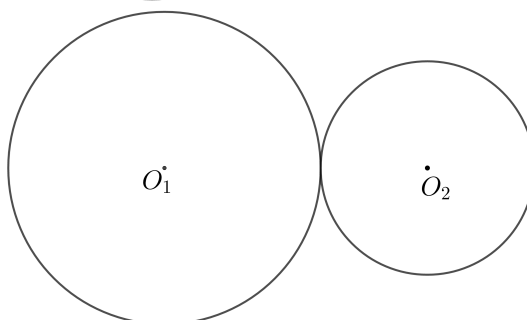
兩圓外離:

如右圖, 當 $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$ 時, 稱此兩圓「外離」.



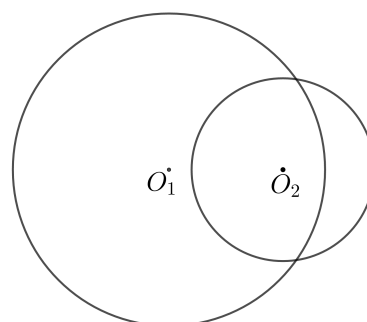
兩圓外切:

如右圖, 當 $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ 時, 稱此兩圓「外切」.



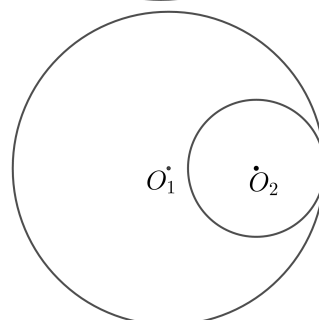
兩圓交於兩點:

如右圖, 當 $r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ 時, 稱此兩圓交於兩點.



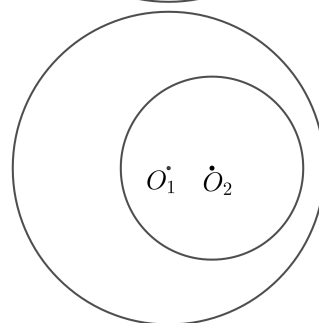
兩圓內切:

如右圖, 當 $\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$ 時, 稱此兩圓「內切」.



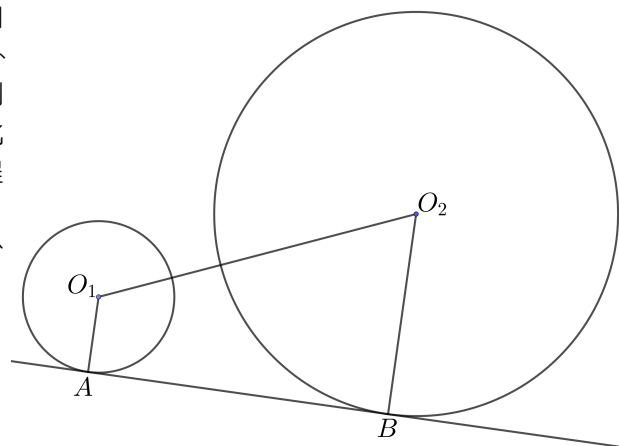
兩圓內離:

如右圖, 當 $r_1 - r_2 > 0$ 且 $\overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$ 時, 稱此兩圓「內離」.

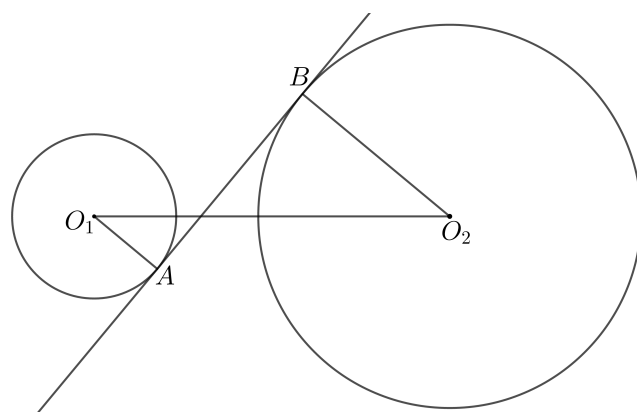


72. 如右圖，兩圓圓心分別為 O_1 、 O_2 ，且兩圓外離，圓 O_1 、圓 O_2 的半徑分別為 6 公分、16 公分， $\overline{O_1O_2} = 26$ 公分，直線 AB 分別切兩圓於 A 、 B 兩點。求出 $\overline{AB}$ 的長。(此時稱直線 AB 為此兩圓的「外公切線」)[提示：作 $\overline{O_1C}$ 垂直 $\overline{O_2B}$ 於 C 點.]

Ans: 24 公分



73. 如右圖，兩圓圓心分別為 O_1 、 O_2 ，且兩圓外離，圓 O_1 、圓 O_2 的半徑分別為 r_1 公分、 r_2 公分， $\overline{O_1O_2} = d$ 公分，直線 AB 分別切兩圓於 A 、 B 兩點。證明 $\overline{AB}$ 的長為 $\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$ 。(此時稱直線 AB 為此兩圓的「內公切線」)[提示：延長 $\overline{O_2B}$ ，作 $\overline{O_1C}$ 垂直直線 O_2B 於 C 點.]



74. 當兩圓外離時，外公切線有幾條？內公切線有幾條？

Ans: 2 條, 2 條.